

Задача (5) – это однородная задача линейного сопряжения на торе, а именно, на прямоугольнике  $[-K, K] \times [-iK', iK']$  со склеенными парами противоположащих сторон. В силу формул (3) и (4) уравнение (1) и задача (5) равносильны, если условиться искать их решения в классе ограниченных функций. Решая задачу (5) с помощью известной теории [4], находим весь спектр характеристических значений интегрального оператора в уравнении (1)

$$\lambda_m = \frac{e^{(2m+1)\pi K'/a} - 1}{e^{(2m+1)\pi K'/a} + 1}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

а также всю систему его собственных функций в пространстве  $L_2(-a, a)$ , соответствующих характеристическим значениям (6):

$$\varphi_m(t) = C \exp\left(\frac{\pi i}{2K}(1+2m)t\right) \times \exp\left(\frac{\pi(2m+1)K'}{2\pi ia} \int_{-a}^a \left(\zeta(\tau-t)d\tau - \frac{d\tau}{2K} \int_{-K-iK'}^{K-iK'} \zeta(u-t)du\right)\right),$$

$m \in \mathbb{Z}$ ,  $\zeta(\cdot)$  – дзета-функция Вейерштрасса [1], построенная по основным периодам  $2K$ ;  $2iK'$ , а  $C$  – произвольная постоянная. Таким образом, получена новая ортогональная система функций в пространстве  $L_2(-a, a)$ .

#### Литература

1. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 303 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Зверович Э.И. // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. 26. – Вып. 1 (157). – С. 113–179.

## К РЕШЕНИЮ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ ТРЕХМЕРНОГО НАПОРНОГО ПЛАСТА

Елесин А.В., Габидуллина А.Н., Кадырова А.Ш.

*Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, г. Казань*

Разработан и численно реализован алгоритм определения коэффициента фильтрации для напорного неоднородного трехмерного пласта произвольной конфигурации. Рассматриваемая задача относится к классу некорректных. Коэффициент фильтрации  $K$  в уравнении стационарной однофазной напорной фильтрации жидкости

$$\operatorname{div}(\mathbf{K} \operatorname{grad} h) + Q = 0 \quad (1)$$

определялся минимизацией функционала

$$J(\mathbf{K}) = \sum_{i=1}^I (h_i - h_i^*)^2 + \alpha \|\mathbf{K} - \mathbf{K}^0\|^2, \quad (2)$$

где  $h_i$ ,  $h_i^*$  – соответственно вычисленные и измеренные значения напора  $h$  на  $i$ -ой скважине,  $\mathbf{K}^0$  – априорное значение коэффициента фильтрации,  $Q$  – функция источников,  $\alpha$  – параметр регуляризации.

Уравнение (1) решалось при граничных условиях первого, второго или третьего рода. Минимизация функционала (2) проводилась квази-ньютоновским методом по алгоритму

$$\mathbf{K}^{\text{new}} = \mathbf{K}^{\text{old}} - \rho \mathbf{H}^{-1} \operatorname{grad} J(\mathbf{K}^{\text{old}}), \quad (3)$$

где  $\rho$  – величина шага,  $\mathbf{H}$  – приближенное значение матрицы Гессе целевой функции. Градиент целевой функции вычислялся с использованием сопряженных функций.

При определении коэффициента фильтрации проанализировано влияние регуляризации и априорного значения  $\mathbf{K}^0$  на сходимость процесса минимизации функционала (2). Особое внимание уделялось анализу решения обратной задачи при отсутствии априорной информации о значении  $\mathbf{K}^0$ , которое в этом случае определялось из решения вспомогательных минимизационных задач.

Рассмотрена следующая модельная задача для трехслойного пласта. Первый слой разбит на 5 зон однородности, второй и третий слой однородны. Значения напоров  $h_i^*$  взяты с 4-х наблюдательных скважин первого слоя и 3-х эксплуатационных скважин первого, второго и третьего слоев при значениях коэффициента фильтрации (м/сут) 1, 10, 20, 10, 0.1 (первый слой), 0.0001 (второй слой), 30 (третий слой). Требуется определить величины  $\mathbf{K}$  по значениям  $h_i^*$ .

Вариант 1. Задача решалась без регуляризации. Функционал (2) в этом случае принимает вид

$$J(\mathbf{K}) = \sum_{i=1}^I (h_i - h_i^*)^2. \quad (4)$$

Начальное значение коэффициента фильтрации 5.9 определялось минимизацией функционала (4) в предположении однородности всего пласта (одно неизвестное значение). Найденные значения  $K$ , равные 33.05, 79.30, 7.88, 6.29, 0.0000001 (первый слой), 3.54 (второй слой), 9.24 (третий слой), далеки от истинных.

Вариант 2. Задача без регуляризации. Начальные значения коэффициента фильтрации (три неизвестных значения) 7.94, 0.07, 21.85 определялись минимизацией функционала (4) в предположении однородности слоев пласта. Найденные значения  $K$  равны 5.16, 16.93, 1.37, 8.22, 7.34 (первый слой), 0.05 (второй слой), 22.6 (третий слой). Полученное решение не совпадает с истинным.

Вариант 3. Задача с регуляризацией. Значение  $K^0$  бралось равным начальному значению из варианта 1. Найденные значения  $K$  равны 0.0000001, 46.11, 0.0000001, 6.82, 0.0000001 (первый слой), 0.85 (второй слой), 22.15 (третий слой). Полученное решение не совпадает с истинным.

Вариант 4. Задача с регуляризацией. Значение  $K^0$  бралось равным начальному значению из варианта 2. Найденные значения  $K$  равны 1.17, 11.59, 19.13, 9.95, 0.016 (первый слой), 0.0014 (второй слой), 29.94 (третий слой). В данном варианте решение близко к истинному.

В вариантах 1 – 3 сходимость по напорам не достигнута. В варианте 4 при совместном использовании регуляризации и предложенного выбора  $K^0$  достигнута сходимость по напорам ( $\max_i |h_i - h_i^*| \leq 0.1$  м) и получены значения коэффициента фильтрации, близкие к истинным.

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗАХ**

**Зарипов Р.Г.**

*Институт механики и машиностроения КНЦ РАН, г. Казань*

Настоящий доклад является обзором экспериментальных и теоретических исследований нелинейных колебаний газа. В последние десятилетия были изучены продольные и преимущественно продольные колебания столба газа, заключенного в трубу конечной длины, при разных частотах возбуждения. Особый интерес был проявлен к резонансным и